Plan $\boxed{181}$ Barycentres-convexité → j'ai l'impression qu'elle est remplie de vide...

On se place sur un espace affine E associé à l'e.v. $\overrightarrow{E}$ (de dim n) ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ~~ou $\mathbb{C}$~~)

I) Barycentres :

A) Déf - 1ère prop

$E \longrightarrow \overrightarrow{E}$

Déf 1 : système de points pondérés + fct de Leibniz : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$
$\forall O \in E \quad = (\sum \alpha_i)\overrightarrow{MO} + \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

Prop 2 : Si $\sum \alpha_i = 0$ f cste
Sinon f bijective, $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{E}$, $f(M)=\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum \alpha_i}\left(\sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{u}\right)$

Déf 3 : barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ (qd $\sum \alpha_i \neq 0$)

Rem 4 : $G = \frac{1}{\sum \alpha_i} \sum \alpha_i A_i$

[MER] p. 34 - 37

THM 5 : [propriétés du barycentre] 1) Homogénéisat° / 2) Commutativité 3) Associativité + dessin

Appli 5 : 3 médianes d'un triangle sont concourantes

Déf 6 : isobarycentre.

Ex 7 : isobarycentre de A, B = milieu de $[AB]$

Rem 8 : centre de gravité d'un système de pts massiques = barycentre du syst.

Rem 9 : Si on considère des points d'un plan réel ($\mathbb{R}^2$), on peut les représenter par des complexes. Ex isobarycentres de n pts ⇝ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = g$

Lemme 10 : det circulant

Dév 1

THM 11 : suite de polygones.

B) Lien avec les espaces et fct affines :

[COM] p. 141 - 142 ou [MER] p. 37 - 38 + 47

~~THM 12 : $\mathcal{A} \subseteq E$ partie non vide. Le ss-espace affine engendré par $\mathcal{A}$ est l'ens. des barycentres des pts de $\mathcal{A}$~~

Ex 13 : L'espace affine engendré par $A \neq B$ est la droite $AB = \{\lambda A + (1-\lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

THM 14 : F ss-espace affine de $E \Leftrightarrow F$ stable par barycentrisat°
(F ⊆ E non vide) $\Leftrightarrow F$ stable ——— de 2 pts.

THM 15 : E, F 2 esp. affines, $f : E \to F$ affine $\Leftrightarrow$ elle conserve les barycentres

Cor 16 : $f : E \to F$ affine $\mathcal{A} \subseteq E$, $f(\mathrm{Aff}(\mathcal{A})) = \mathrm{Aff}(f(\mathcal{A}))$.

C) Coordonnées barycentriques

THM-Déf 17 : famille de points affinement libres

Ex 18 : 3 pts d'un triangle non applati / 2 pts ≠

Déf 19 : repère affine

Rem 20 : $(A_0, \dots, A_n)$ repère affine de E alors $\mathrm{Aff}(A_0, \dots, A_n) = E = A_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_0A_i} \mid i \in [\![1;n]\!])$, tt pt s'écrit comme un barycentre des $A_0, \dots, A_n$.

Déf 21 : coordonnées barycentriques.

THM 22 : 2 syst. de coord. bary ~~ou~~ d'un m̂ pt sont prop, le syst. normalisé est unique

Rem 23 : si pas repère ~~faux~~ : A_0 milieu de $[A_1, A_2]$ ⇝ barycentre de $A_0(1)$, $A_1(0), A_2(0)$ et de $A_0(0), A_1(1), A_2(1)$ mais $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ non prop.

→ + Appli : Thm de Menelaüs + Céva ? preuve à chercher dans Aebischer ? ou faire soi-m̂ (ou voir Combes p141)

[COM] Avant : $(A_0, \dots, A_n)$ repère affine
$(P_0, \dots, P_n)$ sont affin. liés $\Leftrightarrow$ le det des coord. bary $= 0$

II) Convexité :

A) Déf - 1ère prop :

[Comb] p. 141

THM-Déf 24 : $C \subseteq E$.
{Le barycentre de tte famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \dots (A_k, \lambda_k)\}$ de pts pond. de C tq $\forall i\ \lambda_i \geq$ et $\sum \lambda_i = 1$ reste dans C}
$\Longleftrightarrow$
$\forall M, N \in C \quad [MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} \mid \lambda \in [0;1]\} \subseteq C$ [+ dessins]
On dit que C est convexe.

Prop 25 : $\cap$ cvx = cvx

Prop 26 : $f : E \to F$ affinie, C cvx de E $\Rightarrow f(C)$ cvx de F
C' cvx de $F \Rightarrow f^{-1}(C)$ cvx de E

Ex 27 : Une boule unité d'un e.v.n est cvx
Donc pour $q \in Q^{++}$, $\mathcal{E}_q = \{x \mid q(x) \leq 1\}$ (boule unité $\sqrt{q}$) est cvx, c'est une ellipsoï

[FRG-AL3]

Appli 28 : Ellipsoïde de J-L (avec lemme avant)

(Appli 29 : ss-grpe compacts maximaux de $GL(E) = O(q)$ pour $q \in Q^{++}$...)

[181] - Suite

→ À rajouter dans II)A) déf fct cvx, ex + épi(f) cvx ⟺ f cvx + dessin] [BEC] ou exo [COM]

III) B) Enveloppe cvx :

Prop 29 : $X \neq \emptyset$ partie de E, $\bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ X \subset C}} C$ est cvx, c'est la + petite partie cvx de E contenant X, notée conv(X)
c'est aussi l'ens. des baryc. des pts de X

Déf 30 : conv(X) est l'enveloppe cvx de X

Ex 31 : conv({A,B,C}) = triangle ABC
conv(cvx) = cvx
conv{A,B} = [A;B]

Prop 32 : $f : E \to F$ affine $f(\mathrm{conv}(X)) = \mathrm{conv}(f(X))$

Prop 33 : $A \subset E$, l'intersect° des cvx fermés contenant A est $\overline{\mathrm{conv}(A)}$
• A cvx compact ⟹ $\mathrm{conv}(\partial A) = A$.

Rem 34 : A fermé ⇏ conv(A) fermé : $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, xy \geq 1\}$)) ?

THM 35 : Carathéodory (11)

THM 36 : Gauss-Lucas (12)] ??? où ? ... ☹

↖ [Com] p.148 (exo) !

j'ai pas le bon Tauvel ... ☹

[Com] p.143

[TAU] p.51 53

[COM] ?

C) Points extremaux :

THM 37 : éq des pts ext. (13)

Déf 38 : pts extremaux

Ex 39 : • pts extremaux d'un carré = ses sommets
• E ev euclidien, les pts extremaux de $\overline{B(0,1)}$ = sphère unité = X (14)
et $\mathrm{conv}(X) = \overline{B(0,1)}$.

Prop 40 : C cvx de ~~$\mathbb{R}^n$ ou~~ E, $\forall f : E \to E$ affine tq $f(C) = C$
f permute les pts ext. de C (15)

Prop 42 : tt pt intérieur d'une partie cvx n'est pas extremal.

Prop 41 : f strict cvx ⟹ $\forall A \in Gr(f)$, A pts extremal de Épi(f) (16)

[COM]

Ex 42 : pts extremaux de boule unité de L(E)] [FRA. Alg 3])
(17)

Réf :

[MER] - Mercier - Cours de géométrie

[COM] - Combes - Algèbre et géométrie (avec ses exos !)

[FRA. Alg 3]

([TAU] - Tauvel - Cours de géométrie) ← à aller voir...

(~~[BEC]~~ ...)